

Contribución

Se propone un preprocesado multicanal para eliminación de ruido en las imágenes DWI. El preprocesado se realiza previamente al cálculo del tensor de difusión, mejorando con ello las medidas escalares como son la anisotropía fraccional o la difusividad media.

Diffusion Weighted Images

Representación de la difusividad de las moléculas de agua en cada punto x del espacio mediante el tensor

$$D(x) = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

estimado a partir de las imágenes DWI $\bar{S} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^M$ con $\bar{S} := (S_1, \dots, S_M)$ con (M número de direcciones)

$$S_m(x) = S_0(x) e^{-b\bar{g}_m^T D(x) \bar{g}_m} \quad m \in 1..M$$

donde S_m es la señal medida a lo largo de una dirección espacial \bar{g}_m (que se encuentra atenuada respecto a la señal S_0 , señal sin difusión, debido al movimiento de las moléculas de agua) y b es un parámetro dependiente de la secuencia de pulsos, la fuerza del gradiente y otras constantes.

Anisotropía Fraccional

$$AF(x) = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\lambda_1 - \bar{\lambda})^2 + (\lambda_2 - \bar{\lambda})^2 + (\lambda_3 - \bar{\lambda})^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \quad (1)$$

donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los autovalores del tensor D y $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)/3$ es la difusividad media

Modelo Matemático

Sea $\bar{f} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$, $\bar{f} := (f_1, \dots, f_M)$, el modelo de denoising vectorial para ROF se define como,

$$\inf_{\bar{u}} \left\{ F(\bar{u}) := \int_{\Omega} |D\bar{u}| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} |\bar{u} - \bar{f}|^2 dx \right\}$$

con $\bar{u} \in BV(\Omega; \mathbb{R}^M)$ y $BV(\Omega; \mathbb{R}^M) := \{u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^M); \int_{\Omega} |D\bar{u}| < \infty\}$ donde $\lambda > 0$ es un parámetro escalar real $\lambda > 0$, y $\int_{\Omega} |D\bar{u}|$, es la variación total de \bar{u} definida por:

$$\int_{\Omega} |D\bar{u}| := \sup_{\mathbf{p} \in P} \left\{ \int_{\Omega} \langle \bar{u}, \nabla \cdot \mathbf{p} \rangle dx \right\}$$

• $\mathbf{p} := (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_M) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{M \times N}$ con $\bar{p}_i := (p_i^1, \dots, p_i^N) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$

• $\nabla \cdot \mathbf{p} := (\nabla \cdot \bar{p}_1, \dots, \nabla \cdot \bar{p}_M) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ con $\nabla \cdot \bar{p}_i := \sum_{j=1}^N \partial_j p_i^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

• $\langle \bar{u}, \nabla \cdot \mathbf{p} \rangle = \sum_{i=1}^M \langle u_i, \nabla \cdot \bar{p}_i \rangle$

• $P := \{\mathbf{p} \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^{M \times N}) : |\mathbf{p}| \leq 1\}$ donde $|\cdot|$ es la norma euclídea, $|\mathbf{p}| = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (p_i^j)^2}$

Referencias

- [1] Osher S, Burger M, Goldfarb D, Xu J, Yin W. An iterative regularization method for total variation based image restoration. Journal of Multiscale Modeling and Simulation, vol 4, 2005. pp 460-484.
- [2] Bresson X, Chan TF. Fast dual minimization of the vectorial total variation norm and applications to color image processing. Journal of Inverse Problems and Imaging vol 2, n 4, 2008, pp 455-484.

Inverse Scaling

1. Inicializar $\bar{u}_0 \equiv 0, \bar{v}_0 \equiv 0$.

2. Para $j = 0, 1, 2, \dots$

- Calcular \bar{u}_{j+1} como un mínimo de la energía de VROF modificado:

$$J(\bar{u}) = \inf_{\bar{u}} \left\{ F(\bar{u}) := \int_{\Omega} |D\bar{u}| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} |\bar{f} + \bar{v}_j - \bar{u}|^2 dx \right\} \quad (2)$$

- Actualizar \bar{v}_{j+1} :

$$\bar{v}_{j+1} = \bar{v}_j + \bar{f} - \bar{u}_{j+1}.$$

Implementación Numérica

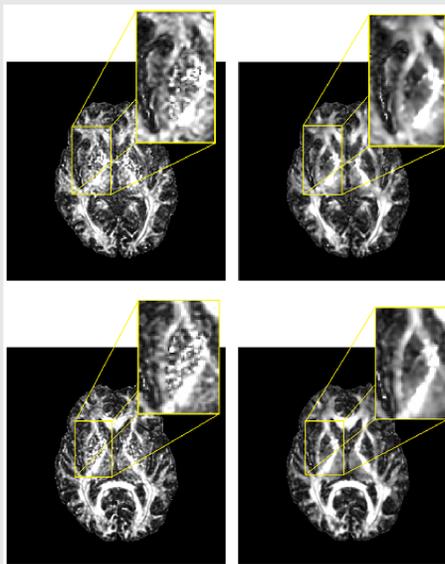
La condición de optimalidad viene dada por:

$$\nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{p} - \bar{f}) - |\nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{p} - \bar{f})| \mathbf{p} = \bar{0} \quad \text{con } \bar{u} = \bar{f} - \lambda \nabla \cdot \mathbf{p}$$

Resolución mediante punto fijo, $\bar{p}_i^{n+1} = \frac{\bar{p}_i^n + \delta t \nabla(\lambda \nabla \cdot \bar{p}_i^n - \bar{f}_i)}{1 + \delta t |\nabla(\lambda \nabla \cdot \bar{p}_i^n - \bar{f}_i)|}$ donde $\tau = 1/8$ y

$$|\nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{p} - \bar{f})| = \sqrt{\sum_{i=1}^M |\nabla(\lambda \nabla \cdot \bar{p}_i - \bar{f}_i)|^2}$$

Resultados



Imágenes adquiridas por un escáner General Electric de 3T equipado con una antena de 8 canales. Las imágenes DWI se obtuvieron con una secuencia single-shot spin-eco EPI (FOV = 24cm, TR=9100, TE=88.9, grosor del corte =3mm, espaciado=0.3, tamaño de la matriz=128x128, NEX=2). Cada imagen DWI consta de una imagen con $b=0/\text{mm}^2$ y 15 imágenes con $b=1000\text{s}/\text{mm}^2$.

Dos cortes de una imagen de anisotropía fraccional. A la izquierda las imágenes obtenidas antes del preprocesado. A la derecha tras el preprocesado.